ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ

Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης n

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (1)$$

όπου οι συντελεστές $a_i \ (i = 0,1,\dots,n-1)$ είναι δοθέντες πραγματικοί αριθμοί.

Ορισμός 1. Το πολυώνυμο

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \quad (2)$$

και η αλγεβρική εξίσωση

$$p(\lambda) = 0, \quad (3)$$

ονομάζονται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** και **χαρακτηριστική εξίσωση,** αντίστοιχα, της διαφορικής εξίσωσης (1).

Σημείωση: Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (2) παράγεται από το αριστερό μέλος της (1) αν αντικαταστήσουμε κάθε παράγωγο $y^{(i)}$ με $\lambda^i \ (i = 0,1,\dots,n)$.

Θεώρημα 1. Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο (2) έχει τις διαφορετικές μεταξύ τους ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ βαθμού πολλαπλότητας $k_1, k_2, \dots, k_m$ αντίστοιχα, όπου $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Τότε η διαφορική εξίσωση (1) έχει τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις

$$\begin{array}{llll} e^{\rho_1 x}, & x e^{\rho_1 x}, & \dots & x^{k_1 - 1} e^{\rho_1 x}, \\ e^{\rho_2 x}, & x e^{\rho_2 x}, & \dots & x^{k_2 - 1} e^{\rho_2 x}, \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ e^{\rho_m x}, & x e^{\rho_m x}, & \dots & x^{k_m - 1} e^{\rho_m x}, \end{array} \quad (4)$$

και επομένως η γενική της λύση δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m} \left(c_{i1} + c_{i2}x + \dots + c_{ik_i} x^{k_i}\right) e^{\rho_i x}, \quad (5)$$

όπου c_{ij} είναι αυθαίρετες σταθερές.

Σημείωση: Αν μια ρίζα του χαρακτηριστικού πολύωνύμου είναι μιγαδική, έστω η $\rho_l = \alpha_l + i\beta_l$ ($\alpha_l, \beta_l \in R$, $\beta_l \neq 0$) με βαθμό πολλαπλότητας k_l, τότε οι αντίστοιχες γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (1)

$$e^{\rho_l x}, \quad xe^{\rho_l x}, \quad .... \quad x^{k_l-1}e^{\rho_l x}, \quad (6)$$

δεν είναι πλέον πραγματικές συναρτήσεις. Εν τούτοις, με τη βοήθεια του γνωστού τύπου του Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις k_l μιγαδικές λύσεις (6) με τις $2k_l$ πραγματικές λύσεις

$$e^{\alpha_l x}\cos(\beta_l x), \quad xe^{\alpha_l x}\cos(\beta_l x), \quad .... \quad x^{k_l-1}e^{\alpha_l x}\cos(\beta_l x),$$

$$(7)$$

$$e^{\alpha_l x}\sin(\beta_l x), \quad xe^{\alpha_l x}\sin(\beta_l x), \quad .... \quad x^{k_l-1}e^{\alpha_l x}\sin(\beta_l x).$$

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι επειδή οι συντελεστές $a_i \ (i = 0,1,\ldots,n-1)$ στην (1) είναι πραγματικοί αριθμοί, οι μιγαδικές ρίζες της (3), αν υπάρχουν, εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών, δηλ. $(\rho_l, \overline{\rho_l})$. Έτσι, εύκολα προκύπτει ότι το σύνολο των $2k_l$ πραγματικών λύσεων (7) αντιστοιχεί και στις δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

ΒΑΣΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

Να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

1. $y^{(4)} - 9y'' + 20y = 0$.

2. $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$.

3. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

4. $y^{(4)} - y = 0$.

ΛΥΣΕΙΣ

1. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^4 - 9\lambda^2 + 20 = 0,$$

και έχει τις ρίζες

$$\rho_1 = 2,\ \rho_2 = -2,\ \rho_3 = \sqrt{5},\ \rho_4 = -\sqrt{5}.$$

Έτσι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{\sqrt{5}x} + C_4 e^{-\sqrt{5}x},$$

όπου C_1, C_2, C_3, C_4 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

2. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$(\lambda - 1)^3 = 0,$$

δηλ. έχει την ρίζα $\rho_1 = 1$ με πολλαπλότητα 3. Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x,$$

όπου C_1, C_2, C_3 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

3. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\lambda^2 + 1\right)^2 = 0,$$

δηλ. έχει τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\rho_1 = i$ και $\rho_2 = \overline{\rho_1} = -i$ με πολλαπλότητα 2. Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = \left(C_1 + C_2 x\right)\cos x + \left(C_3 + C_4 x\right)\sin x,$$

όπου C_1, C_2, C_3, C_4 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

4. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^4 - 1 = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\lambda^2 + 1\right)\left(\lambda^2 - 1\right) = 0,$$

δηλ. έχει τις πραγματικές ρίζες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = -1$ και τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\rho_3 = i$ και $\rho_4 = \overline{\rho_3} = -i$. Έτσι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x,$$

όπου C_1, C_2, C_3, C_4 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.